

## CA PRIN MAGIE

Când matematicienii devin magicieni și iluzioniști

FERNANDO BLASCO

Traducere de Ionela Polixenia Matei

## CUPRINS

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capitolul 0. Magicieni, matematicieni și oameni de știință</b> | <b>7</b>  |
| <i>Luca Pacioli și primele jocuri de magie</i>                    | 8         |
| <b>Capitolul 1. Numerele, prezicerea și criptografia RSA</b>      | <b>13</b> |
| Ghiciți un număr                                                  | 15        |
| Proprietăți elementare ale numerelor                              | 20        |
| Bancnotele: magia banului                                         | 24        |
| Șirul lui Fibonacci                                               | 27        |
| Operații într-un pachet de cărți                                  | 33        |
| <i>Henri Decremps, dușmanul iluzioniștilor</i>                    | 34        |
| <b>Capitolul 2. Geometrie și iluzie</b>                           | <b>41</b> |
| Minciuni geometrice                                               | 41        |
| Anamorfoze și stereoscopii                                        | 46        |
| Iluzii optice                                                     | 52        |
| <i>Martin Gardner</i>                                             | 54        |
| Topologie, noduri și frânghii                                     | 56        |
| <b>Capitolul 3. Probabilitate în magie</b>                        | <b>63</b> |
| Jocuri contraintuitive                                            | 63        |
| Probabilitate și psihologie                                       | 69        |

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Elefanți în Danemarca?                 | 71 |
| Probabilitatea într-un pachet de cărți | 74 |
| <i>Persi Diaconis</i>                  | 78 |
| Coincidențe                            | 80 |
| <i>Colm Mulcahy</i>                    | 83 |
| Statistici și magicieni                | 84 |

## Capitolul 4. Codificare: știința ascunderii și comunicării secretelor 87

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| Coduri în magie                  | 87  |
| <i>Jean Eugène Robert-Houdin</i> | 88  |
| Coduri și minciuni               | 91  |
| Principiul lui Gilbreath         | 97  |
| Jocul lui Fitch Cheney           | 103 |
| <i>Raymond Smullyan</i>          | 106 |
| Secvențele lui De Bruijn         | 107 |
| <i>S. Brent Morris</i>           | 112 |

## Capitolul 5. Matematică, magie și arte înrudite 115

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Pariuri de salon                  | 115 |
| Soluții                           | 119 |
| Distracții cu fizica și cu chimia | 121 |
| Matematica origami                | 124 |
| <i>Bob Hummer</i>                 | 125 |
| Flexagonele și caleidociclurile   | 129 |
| Globoflexia                       | 133 |
| <i>Vi Hart</i>                    | 134 |

## ANEXE 137

## Lecturi recomandate 139

## Glosar 141

## Magicieni, matematicieni și oameni de știință

Legătura dintre matematică și magie ni se poate părea recentă, dar există documente care atestă existența ei acum cinci sute de ani. Prima carte în care se vorbește despre un joc de magie cu cărți a fost scrisă de un matematician: Luca Pacioli. El și Leonardo da Vinci, discipolul și prietenul său, au scris un tratat despre ceea ce am putea descrie acum ca fiind matematica recreativă. Este vorba despre *De Viribus Quantitatis* (*Despre puterea numerelor*, 1496–1508). Luca și Leonardo erau amândoi iubitori de magie, divertisment și ghicitori logice. Pentru ei, algebra era ceva magic, surprinzător, care le permitea să rezolve problemele într-un mod sistematic și simplu.

Chiar și astăzi, progresele în matematică par a fi o magie: pare incredibil să putem efectua plăți cu un telefon mobil, care ne permite, de asemenea, să accesăm căsuța noastră de poștă electronică, precum și imensa bază de date a World Wide Web. Ceea ce este și mai incredibil este că, în general, comunicațiile sunt sigure (inclusiv parolele conturilor noastre personale). În acest sens, reamintim că scriitorul de știință-ficțiune Arthur C. Clarke, un savant în matematică și în fizică, deși este cel mai bine cunoscut pentru activitatea sa literară, a enunțat trei principii legate de știință și progresul acesteia:

## LUCA PACIOLI ȘI PRIMELE JOCURI DE MATEMAGIE

Luca Pacioli (1445-1517) s-a născut la Sansepolcro, unde își avea magazinul Piero della Francesca. Tocmai aici se crede că și-a început drumul cunoașterii. Mai târziu a ajuns la Veneția, unde a studiat matematica cu Domenico Bragadin. Apoi s-a mutat la Roma și a locuit în casa lui Leon Battista Alberti; aceasta a fost și perioada în care a studiat teologia și a aderat la Ordinul Franciscan. A predat matematica la universitățile din Perugia, Zara, Napoli și Roma, înainte de a publica *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* în Veneția, care a adunat toate cunoștințele matematice ale vremii și a devenit un text de referință de bază pentru evoluțiile ulterioare ale disciplinei.

Drumurile lui Pacioli și ale lui Leonardo da Vinci s-au întâlnit la Milano în 1496, an ce marchează începutul prieteniei lor și, de asemenea, al unei colaborări fructuoase. Astfel, Pacioli a început să-și scrie cartea de geometrie *De divina proportione* cu ajutorul unui ilustrator respectabil: Leonardo însuși. Mai târziu, s-au mutat împreună la Veneția și Florența. În aceea perioadă, au adunat ghicitori și jocuri de logică cu care Pacioli a completat, puțin mai târziu, *De Viribus Quantitatis*, cel mai vechi document cunoscut în care este menționat un joc de magie cu cărți. Cartea nu a fost niciodată

1. Atunci când un om de știință eminent, dar în vârstă, susține că ceva este posibil, aproape sigur are dreptate. Când spune că ceva este imposibil, cel mai probabil greșește.
2. Singura modalitate pentru a descoperi limitele posibilului este să te aventurezi dincolo, în imposibil.
3. Este greu să faci distincție între tehnologiile noi și magie.

În cadrul acestei cărți, al treilea principiu ne interesează în mod special. De fapt, magia a folosit întotdeauna tehnologia rămânând în

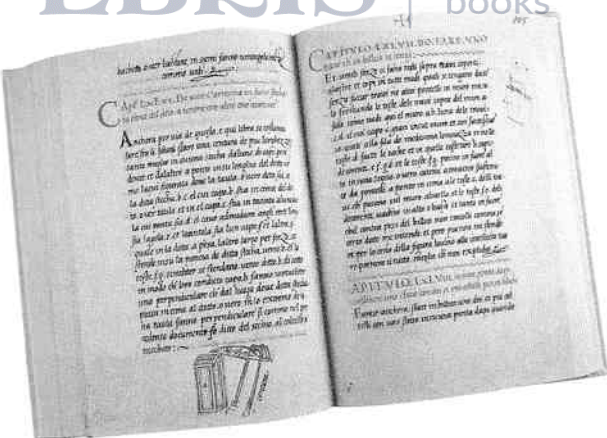


Figura 1. *De Viribus Quantitatis* (facsimil editat de F. Honsell și G.T. Bagni. Aboca Edizioni, 2009).

publicată, dar manuscrisul este păstrat la Universitatea din Bologna, chiar acolo unde a rămas ascuns timp de cinci sute de ani, până când Davide Singmaster, un matematician expert în matematică recreativă, a găsit o referință la un text într-o altă carte și a început cercetarea acestuia. Se crede că Pacioli și Da Vinci au compus colecția împreună, deoarece multe dintre jocurile descrise acolo se regăsesc în caietele lui Leonardo.

**limitele cunoștințelor științifice: intenția magicienilor este de a uimi, de aceea au nevoie de idei, obiecte, tehnici și mecanisme necunoscute oamenilor, tipice lumii cercetătorilor.**

Iluzioniștii obișnuiesc să spună că 80% din succesul unui joc de magie este determinat de un factor psihologic, iar 20% de o anumită abilitate, de exemplu, un talent pentru matematică, dexteritate manuală, fizică... în fine, așa-numitul „truc”; iată lucrul cu adevărat surprinzător: în spectacol „trucul” contează doar 20%, în timp ce

restul depinde de așteptările spectatorului, deci de modul în care îi vom putea capta atenția și îl vom face să se distreze cu scamatoria folosind stratagemele corespunzătoare. Nu este surprinzător că unii neurologi studiază strategiile folosite de iluzionisti pentru a înșela publicul. În special, savanții sunt interesați de capacitatea magicienilor de a crea situații în care reușesc să devieze percepția. Importanța acestui tip de experimente este comparabilă cu aceea a contraexemplurilor din matematică. Prin urmare, magia este indisolubil legată de știință și nu doar de matematică sau fizică, ci și de disciplinele nou-apărute.

Jocurile de logică sunt un antrenament excelent pentru oricine se apropie de lumea magiei, deoarece în timp ce rezolvați nu trebuie să vă faceți griji cu privire la cât de priceput sunteți cu mâinile: jocurile funcționează de la sine (cel puțin la un prim nivel de dificultate) și permit începătorului să se concentreze asupra prezentării jocului: capacitatea de a capta atenția privitorului, de a masca matematica ascunsă în joc și de a se juca cu emoțiile publicului care, în cele din urmă, este scopul final al unui spectacol de magie.

După publicarea cărții lui Pacioli și a lui Da Vinci, au fost scrise numeroase tratate despre știința recreației, ce cuprind jocuri de magie matematică și, mai general, de magie științifică (lichide care își schimbă culoarea, jocuri realizate cu oglinzi sau magneți). În ciuda acestui fapt, primul care a scris o carte completă despre magia matematică a fost Martin Gardner, care în 1956 a publicat *Ghicitori și jocuri matematice*. Noi, iubitorii de magie matematică, am luat-o aproape toți pe urmele lui Martin Gardner, bazându-ne pe cărțile și articolele sale populare. Acest autor nu a făcut o reală carieră „științifică”, dar a fost mereu interesat de fizică și matematică; nici nu s-a dedicat profesiei de magie, dar a reușit să inventeze multe jocuri și să le găsească în texte vechi. Cărțile sale reprezintă un punct de referință fundamental în ambele discipline – magie și matematică –, iar intenția acestei cărți este aceea de a-i continua activitatea. Mulți dintre cititori se vor putea

apropia de minunile matematicii printr-o activitate artistică precum magia. Suntem la fel de convinși că mulți oameni sunt incapabili să se distreze cu matematica, deoarece ignoră existența matematicii recreative. Sperăm că prin citirea acestei cărți o va descoperi.

# Numerele, prezicerea și criptografia RSA

Dacă cineva ne întreabă ce este matematica, ne gândim imediat la cifre. Nu luăm în considerare geometria și, cu atât mai puțin, întregul sistem matematic, din care astăzi ar părea ciudat să excludem probabilitățile, statistica și calculul. Științele matematice sunt esențiale în viață, pentru influența directă pe care o au asupra științei și tehnologiei, dar și pentru rolul pe care l-au jucat în artă și – de ce să nu recunoaștem – în lumea divertismentului. Astăzi suntem uimiți de mișcările personajelor din desenele animate: ei bine, animația lor este studiată în detaliu și creată datorită matematicii; unele efecte optice în spectacolele de teatru se bazează pe tehnologii care funcționează grație matematicii și, așa cum am spus, vom vedea că, de mai multă vreme, științele matematice servesc pentru divertisment și, în același timp, pentru a învăța.

Fiecare dintre noi poate fi identificat cu unul sau mai multe numere: de exemplu, cele ale cărții de identitate, ale unui pașaport sau ale telefonului. La școală învățăm numerele și unele dintre proprietățile lor, dar lucrul cel mai important în matematică este să înțelegem cum și de ce funcționează numerele pe care adesea a trebuit să le memorăm (de exemplu, studiind tabla înmulțirii) sau proprietățile

lor. În acest capitol, vom aplica cunoștințele de bază ale aritmeticii pentru a crea iluzii. Pentru a face acest lucru, vom aminti mai întâi câteva concepte.

### ***O chestiune de proprietate***

Știm cu toții să adunăm două numere, nu? Și ordinea în care le adunăm nu este importantă (adică  $5 + 3 = 3 + 5$ ). Această proprietate, de natură generală, este cunoscută sub numele de *proprietate comutativă* și ne face viața mult mai ușoară. Să presupunem că știm deja cum să adunăm două numere și acum dorim să adunăm trei. Cum facem? Începem prin a aduna primele două numere și îl adunăm și pe al treilea la rezultat, sau ar fi mai bine să adunăm ultimele două mai întâi și să adunăm primul la sumă? Practic este la fel, deoarece se obține același rezultat. Aceasta se numește *proprietate asociativă* și ne permite să eliminăm parantezele:  $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ . Acestea fiind spuse, putem aduna deja orice cantitate. Aceste două proprietăți – comutativă și asociativă – sunt valabile și pentru înmulțire. Dacă amestecăm sume și înmulțiri trebuie să vorbim despre o altă proprietate fundamentală, *proprietatea distributivă*, pentru care:  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ; adică, înmulțirea unui număr cu o sumă echivalează cu înmulțirea acelui număr cu fiecare dintre adunări, realizând apoi suma produselor.

Pentru a ne realiza magia vom avea nevoie de proprietăți elementare ca acestea și altele, adăugând criterii de divizibilitate și puțină logică și ingeniozitate. Dar să o luăm mai ușor. Uneori vom fi obligați să recurgem la termeni tehnici în detrimentul simplității; de exemplu, atunci când folosim cuvântul „număr” ne referim aproape întotdeauna la ceea ce se numește tehnic un număr natural (1, 2, 3, 4 ...), chiar dacă nu va fi întotdeauna așa și, uneori, vom avea în vedere numere precum 0,5,  $\pi$  sau  $\sqrt{2}$ .

Să ne imaginăm că asistăm la spectacolul unui „matemagician” care caută un voluntar în rândul publicului, Vittorio. În primul rând, magicianul îi cere să se gândească la un număr mai mic de 100 și să îl scrie pe o foaie (fără a fi văzut de nimeni); foaia va fi îndoită și pusă deoparte.

În acest moment, matemagicianul implică alți trei spectatori – Aurora, Bianca și Cecilia – și îi cere lui Vittorio să le arate numărul pe care l-a scris, fără ca restul publicului să-l poată vedea. Apoi, îi cere Aurorei să împartă numărul la 3 și să-i spună restul împărțirii (ea face împărțirea mental și răspunde că restul este 2), Biancăi îi cere să împartă la 5 și, din nou, să-i anunțe restul (egal cu 3), și în cele din urmă îi cere Ceciliei să împartă numărul la care s-a gândit Vittorio la 7 și să-i spună restul (al său este 5).

Așadar, magicianul le cere lor să se gândească la număr, fără să îl spună. Deodată strigă: „Am înțeles! Am găsit numărul. Este 68!”, și îi cere lui Vittorio să ia foaia și să o arate publicului: numărul coincide cu cel ghicit de magician, care primește binemeritatele aplauze.

Acest truc, fără nicio modificare, coincide cu cel menționat în cartea *De Viribus Quantitatis* a lui Luca Pacioli. Acum să vedem cum a reușit magicianul să „adune” gândurile voluntarilor.

Cu siguranță a trebuit să muncească din greu sau, cel puțin, a trebuit să facă un calcul foarte repede. De fapt, toți magicienii exersează și, cu puțin antrenament, organizează spectacolul.

O posibilă soluție ar putea fi calcularea tuturor numerelor care îndeplinesc condițiile pe care dorim să le stabilim pentru voluntarii noștri. În cazul Aurorei, numerele mai mici de 100 care după împărțirea la 3 dau restul 2 sunt: 2, 5, 8, 11, 14... și așa mai departe până la 98 (numărați doar din trei în trei începând de la rest, în acest caz 2). Lista care îndeplinește condițiile Biancăi va fi formată din numerele 3, 8, 13, 18, 23... până la 98 (numărând din cinci în cinci începând cu

restul). Și, în cele din urmă, pentru Cecilia lista va fi alcătuită din 5, 12, 19, 26, 33... până la 96 (numerele care rezultă din numărarea din șapte în șapte începând cu restul).

Odată ce cele trei serii au fost calculate, trebuie să le comparăm pentru a găsi numărul prezent în toate trei. Poate părea o metodă greoaie, care necesită multă memorie. Și, de fapt, trebuie să rezolvăm o problemă și mai mare: suntem siguri că există un număr și doar unul singur care îndeplinește cele trei condiții? Din fericire, da, și o știm datorită unei teoreme pe care studenții de la olimpiada de matematică o folosesc foarte mult: așa-numita *teoremă chineză a resturilor*.

### ***Teorema chineză a resturilor***

Presupunem că avem trei numere –  $m_1, m_2, m_3$  – și că fiecare pereche are ca divizor comun doar pe 1. Așadar, dacă luăm alte trei numere –  $b_1, b_2, b_3$  –, este posibil să găsim un număr  $n$ , astfel încât să poată fi exprimat în același timp cu  $b_i$  plus un multiplu al  $m_i$  pentru fiecare  $i = 1, 2, 3$ .

Să nu ne speriem de rezultat; este o ocazie pentru cititorii mai experimentați și curioși să afle mai multe. În plus față de formula sa precisă, aspectul interesant este că teorema ne oferă o metodă pentru a calcula pur și simplu „magic” numărul la care s-a gândit Vittorio, fără a fi nevoie să recurgem la sisteme lungi și plictisitoare, încercări și verificări nefolositoare.

Mai întâi va trebui să înmulțim resturile comunicate de cele trei colaboratoare cu 70, 21 și 15 ( $b_1, b_2, b_3$  din teoremă), apoi să le adunăm:  $2 \times 70 + 3 \times 21 + 5 \times 15 = 278$ .

Rezultatul se va împărți la 105 („modulul” teoremei), iar restul obținut va coincide cu numărul la care s-a gândit Vittorio. În cazul nostru, dacă împărțim 278 la 105 vom obține un rest de 68 ( $278 - 2 \times 105$ ).

## Ghicitoare

Putem juca un joc similar cu un alt set de trei numere. De exemplu, 5, 7 și 9 sunt două câte două prime între ele. În acest caz, trebuie să cerem să ne gândim la un număr între 1 și 315. Important este să existe o teoremă care să susțină jocul, adică, deși nu știm cum să determinăm numărul, teorema ne garantează că împărțirea la 5, 7 și 9 va duce la obținerea unor astfel de resturi. La început, găsirea numărului nu pare deloc ușoară, dar dovada teoremei chineze a resturilor ne oferă și numerele „magice” de care avem nevoie și care în acest caz vor fi respectiv 126, 225 și 280.

Cine vrea să încerce să ghicească numărul la care m-am gândit? Împărțindu-l la 5 dă restul 1, împărțindu-l la 7 dă restul 3 și împărțindu-l la 9 dă 6.

Iată calculul:  $1 \times 126 + 3 \times 225 + 6 \times 280 = 2481$ .

Împărțind la 315 și ținând restul deoparte, soluția este numărul la care m-am gândit. Ce număr este?

Soluția: 276

Pentru a obține „numerele magice” pe care le-am folosit, există o procedură standard, deductibilă din dovada rezultatului anterior. Cititorii se pot gândi singuri să ajungă la soluție sau să revizuiască conceptele de bază pe unele texte elementare. Intenția acestei cărți este aceea de a expune doar o parte din proprietățile matematice necesare, lăsându-le pe altele aprofundării libere.